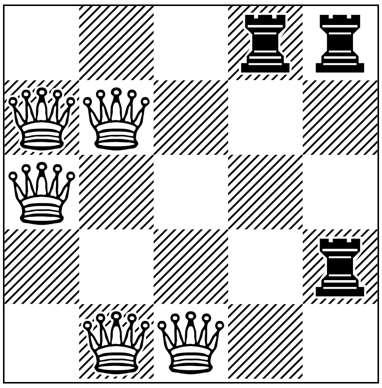
Oplossingen van de winter opgaven

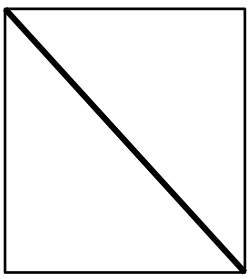
1. Kun je op een schaakbord van 5x5 vijf dames van één kleur neerzetten zodat je daarna drie torens van de andere kleur kunt neerzetten zonder dat één van de torens geslagen kan worden door een dame? Zo ja, hoe dan. Zo nee, bewijs dat dit niet kan.

Antwoord: Ja dit kan.



2. Een draadje is om een staaf gewikkeld, de staaf is 12 cm. lang en de omtrek van de staaf is 4 cm. Het draadje gaat precies vier keer om de staaf heen. Hoe lang is het draadje?

Antwoord: Als we één omwenteling nemen en de omtrek van de staaf uitrollen krijgen we een rechthoek van 3 bij 4 cm met het touwtje op de diagonaal.



3 cm (=1/4 van lengte van staaf)

Volgens Pythagoras is de lengte van het touwtje in één omwenteling 5 cm. Er zijn vier omwentelingen, dus de totale lengte van het touwtje is 20 cm.

3. Er is een vierkant met op elke hoek een munt. Je bent geblinddoekt en moet proberen om alle munten met kop of alle munten met munt naar boven te krijgen. Je mag ze zoveel munten omkeren als je wilt en daarna vragen of het gelukt is; dit beëindigt je ronde. Na elke ronde wordt het vierkant een aantal

kwartslagen gedraaid, hierna mag je nog een keer proberen. Is er een strategie die garandeert dat alle munten met kop naar boven of alle munten met munt naar boven komen binnen een eindig aantal rondes? Zo ja, wat is het kleinste aantal rondes dat je hiervoor nodig hebt?

Antwoord: Ja er is een goede strategie.

Er zij twee verschillende toestanden: (1) het aantal munten met kop boven is even, en (2) het aantal munten met kop boven is oneven. Als je een even aantal munten omdraait blijf je in dezelfde toestand, als je een oneven aantal munten omdraait ga je naar de andere toestand.

Voor de toestand met een even aantal munten kop is er een goede strategie: draai eerst een even aantal munten om en vraag of het goed is. Als het niet goed is moeten er twee kop en twee munt zijn. Deze kunnen kruislings of zijdelings liggen. Draai nu twee schuin tegenoverliggende munten om. Als het kruislings lag ben je klaar, als het zijdelings lag blijft het zijdelings. Draai nu twee munten aan één zijde om. Als dit de goede zijde was ben je klaar, als dit de foute zijde was liggen de munten nu kruislings. Draai hierna nog éénmaal twee schuin tegenoverliggende munten om. Nu moet je klaar zijn.

De algemene oplossing is nu eenvoudig: kijk eerst of er een even aantal munten met kop zijn door bovenstaande sequentie uit te voeren. Als dat niet het geval is was er een oneven aantal munten met kop. Draai een oneven aantal munten om en het aantal munten met kop moet even zijn. Voer de bovenstaande sequentie nog een keer uit en je bent klaar.

4. Er zijn 25 paarden en je wil weten welke de drie snelste paarden zijn. Om de onderlinge snelheid te meten kun je de paarden tegen elkaar laten racen. De races geven accuraat weer welke paarden het snelst zijn. Maar je kunt maar vijf paarden tegelijkertijd laten racen. Hoeveel races heb je minimaal nodig om de drie snelste paarden te vinden?

Antwoord: het kan in zeven races.

Organiseer eerst vijf races waarin ieder paard één keer loopt. Van iedere race vallen de nummers 4 en 5 af. Organiseer nu een zesde race met de vijf winnaars. De nummers 4 en 5 van deze race vallen ook af, maar ook de nummers 2 en 3 van de oorspronkelijke race van deze paarden. De nummer 3 van de zesde race kan nog wel tot de drie snelste paarden horen, maar de nummer 2 en 3 van zijn oorspronkelijke race zeker niet. De nummer 2 van de zesde race kan ook tot de drie snelste paarden horen, evenals de nummer 2 van zijn oorspronkelijke race. De winnaar van de zesde race is het snelste paard. De nummers 2 en 3 van zijn oorspronkelijke race kunnen ook nog tot de drie snelste paarden horen. We nu hebben dus één paard waarvan we weten dat het het snelste is en vijf paarden die tot de drie snelste kunnen horen. Organiseer nu een zevende race met deze vijf paarden. De nummer 1 en 2 hiervan zijn de nummer 2 en 3 van het totaal.

5. Je hebt de getallen 1, 5, 6, 7. Hiermee moet je het getal 21 maken door middel van optellen, aftrekken, delen en/of vermenigvuldigen. Ieder getal moet je precies één keer gebruiken. Je mag natuurlijk ook haakjes gebruiken. Hoe doe je dit?

Antwoord: met een beetje lagere school rekenen valt dit eenvoudig af te leiden:

$$21 = 3x7 = \frac{6}{2}\ x\ 7 = 6\ x\ \frac{7}{2} = 6\ x\ \frac{7}{7-5} = 6/\frac{7-5}{7} = 6/(\frac{7}{7}-\frac{5}{7}) = 6/(1-\frac{5}{7})$$

6. Op een tafel liggen 28 munten. Je weet dat 17 met kop boven liggen en 11 met munt boven. Je bent geblinddoekt. Je mag zelf een willekeurig aantal munten omdraaien en daarna moet je de munten in twee groepen verdelen zodanig dat beide groepen evenveel munten hebben met kop boven. Hoe doe je dit? (De beide groepen hoeven niet even groot te zijn.)

Antwoord: Verdeel de munten in een groep van 17 en een groep van 11. In de groep van 17 zijn *k* munten met kop boven. In de groep van 11 zijn er dus 17-*k* munten met kop boven (samen waren er immers 17 munten met kop boven). In de groep van 17 zijn ook 17-*k* munten met munt boven. Draai de munten in de groep van 17 allemaal om. Nu zijn hier ook precies 17-*k* munten met kop boven.

7. Er is een flatgebouw met 100 etages. Je krijgt twee identieke eieren. De eieren hebben de eigenschap dat als ze van een bepaalde drempeletage of een hogere etage vallen ze kapot gaan, maar als van een lagere etage vallen blijven ze heel en lopen ze zelfs geen schade op. Welke strategie moet je gebruiken om met een minimaal aantal keren laten vallen de drempeletage te vinden? En wat is dit minimaal aantal keren in het meest ongunstigste geval?

Deze opgave staat bekend als het Google Programmeur Interview probleem. Mensen die bij Google solliciteren als programmeur krijgen (kregen) deze opgave voorgelegd.

Antwoord: Stel dat het ei niet breek op een bepaalde etage n, maar wel op een hogere etage m, dan rest je niets anders om met het andere ei één voor één alle etages *n*+1, *n*+2 enz. af te gaan tot *m*-1. Dit zijn *m*-*n*-1 etages. Je kunt beginnen met je eerste ei op een etage *k*. Als het breekt moet je nog hooguit *k*-1 keer gooien. In totaal heb je dan *k* keer gegooid. Als het niet breekt moet je een volgende etage kiezen zodat je hierna hooguit *k*-2 keer hoeft te gooien, dan heb je in totaal weer hooguit *k* keer gegooid. Dit is etage *k*+(*k*-1). Bij niet breken is de volgende etage dan *k*+(*k*-1)+(*k*-2) enz. Je gooit dan altijd hooguit *k* keer. We moeten dus een zo'n klein mogelijke *k* vinden zodanig dat *k*+(*k*-1)+(*k*-2)+ ……. + 3 + 2 + 1 groter is dan 100. Dit geldt voor *k*=14.

We beginnen dus met etage 14 en bij niet breken volgen daarna de etages 27, 39, 50, 60, 69, 77, 84, 90, 95, 99, 100.

De som 1+2+3+ ….. + (*k*-2)+(*k*-1)+*k* uitrekenen is niet moeilijk. Er gaat een anekdote over Gauss op de lagere school. Zijn onderwijzer wilde een uurtje rustig huiswerk kunnen nakijken zonder gestoord te worden door de kinderen. Daarom gaf hij hen opdracht om alle getallen van 1 tot en met 100 bij elkaar op te tellen. Na twee minuten was Gauss hier al klaar mee en vertelde dat er 5050 uitkwam. De onderwijzer geloofde dit niet en vroeg hoe hij dit dan wel zo snel uitgerekend had. Gauss legde uit dat hij 1 bij 100 had opgeteld, 2 bij 99 enzovoort. Dan houdt je 50 keer 101 over. Dat is 5050. Vroeger hadden onderwijzers het ook al zwaar.

8. Een cavia heeft vijf holen op een rijtje. Iedere nacht verhuist de cavia naar een naburig hol, soms naar links, soms naar rechts. Iedere morgen mag je één hol bekijken of de cavia daar in zit. Wat is de optimale strategie om er zeker van te zijn dat je de cavia uiteindelijk vindt?

Antwoord: Nummer de holen van 1 tot en met 5. Er zijn twee mogelijkheden: na een oneven nacht zit de cavia in een even hol en na een even nacht zit de cavia in een oneven hol, of na een oneven nacht dag zit de cavia in een oneven hol en na een even nacht zit de cavia in een even hol.

Eerst gaan we de eerste mogelijkheid na. Na nacht één zit de cavia dus in hol 2 of 4. We kijken in hol 2. Als hij daar niet is zit hij in hol 4 en gaat hij in de volgende nacht naar hol 3 of 5. We kijken na nacht twee in hol 3 en als hij daar niet is dan zit hij in hol 5 en na de volgende nacht moet hij dus in hol 4 zitten. Na nacht drie kijken we in hol 4 als we hem daar niet vinden was onze aanname fout en moet dus de tweede mogelijkheid gelden. Na nacht vier zit hij dus in een even hol: hol 2 of 4. We kijken na nacht vier in hol 4. Als de cavia hier niet zit bevindt hij zich in hol 2 en zit hij na de volgende nacht in hol 1 of 3. We kijken na nacht vijf in hol 3. Als hij hier niet is moet hij dus in hol 1 zijn en de komende nacht gaat hij naar hol 2. Hier kunnen we hem vinden. De volgorde van kijken is dus: 2,3,4,4,3,2.